第 40 卷　第 2 期
2023 年 4 月

应　用　力　学　学　报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 40 No. 2
Apr. 2023

文章编号:1000-4939(2023)02-0443-07

基于修正偶应力理论和微分变换法的输流微管自由振动

朱成秀[1],随岁寒[1],李成[1,2,3]

(1. 苏州大学轨道交通学院, 215131 苏州;2. 常州工学院汽车工程学院,213032 常州;
3. 桂林电子科技大学广西密码学与信息安全重点实验室,541004 桂林)

摘　要:考虑黏性流体在微管道内作层流运动,给出了黏性流体在微圆管中的速度分布方程。利用修正偶应力理论和 Euler 梁模型建立细长微管模型,根据虚功原理推导输流微管流-固耦合振动方程,应用微分变换法计算微管道系统的固有频率。通过与有限差分法求解结果对比,证明微分变换法具有较高的精度。随后,研究了流体黏性、微管材料内禀特征尺寸和预应力对固有频率的影响。最后,分析了流体临界流速与预应力的关系。数值结果表明:在流体平均速度相同的条件下,考虑流体黏性时微管各阶固有频率偏低,并且平均速度越大,这一趋势越明显。

关键词:黏性流体;输流微管;微分变换法;固有频率;临界流速

中图分类号:O326;O351　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2023.02.022

Free vibration of fluid-conveying micro-tubules using the modified couple stress theory and differential transformation method

ZHU Chengxiu[1],SUI Suihan[1],LI Cheng[1,2,3]

(1. School of Rail Transportation,Soochow University,215131 Suzhou,China;2. School of Automotive Engineering, Changzhou Insititute of Technology,213032 Changzhou,China;3. Guangxi Key Laboratory of Cryptography and Information Security,Guilin University of Electronic Technology,541004 Guilin,China)

Abstract: Considering a laminar flow of viscous fluid in micro-tubules,the velocity distribution equation of viscous fluid in a circular micro-tubule is provided. The modified couple stress theory and Euler beam model are used to develop the slender micro-tubule model,and the liquid-solid coupled vibration equation of the flow-conveying micro-tubules is derived based on the principle of virtual work. The natural frequencies of the flow-conveying micro-tubules are calculated using the differential transformation method. It is indicated that the differential transformation method is of high accuracy compared with the results obtained by the finite difference method. Subsequently,the effects of liquid viscosity,material length scale parameter and pre-stress on natural frequencies are examined. Finally,the relationship between the critical speed of fluids and the pre-stress is analyzed. From the numerical results,it can be concluded that under the condition of the same average velocity of fluids,the natural frequencies of micro-tubules become lower when

收稿日期:2022-04-19　　**修回日期:**2022-09-07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11972240);广西密码学与信息安全重点实验室研究课题(No. GCIS201905)
通信作者:李成,教授。E-mail: licheng@czust.edu.cn
引用格式:朱成秀,随岁寒,李成. 基于修正偶应力理论和微分变换法的输流微管自由振动[J]. 应用力学学报,2023,40(2):443-449.
ZHU Chengxiu, SUI Suihan, LI Cheng. Free vibration of fluid-conveying micro-tubules using the modified couple stress theory and differential transformation method[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(2):443-449.

considering the fluid viscosity, and the higher the average velocity is, the more obvious the downward trend of natural frequencies is.

Key words: viscous fluid; flow-conveying microtubule; differential transformation method; natural frequency; critical speed

近年来,有大量文献研究输流管道振动与稳定性问题[1-19],其中也包括微纳米输流管道耦合振动的研究[8-19]。文献[1]研究宏观悬臂输流管的动力学行为,利用 Galerkin 方法求解运动方程,分析了脉动内流激励与基础激励联合作用对悬臂输流管的影响。本研究的输流微管可视为人体血管动力学的基本模型。此外,随着微加工技术的发展,在热交换器领域也有着广泛的应用,由于输流管的微型化,导致微管流动基本是层流。研究输流微管的力学行为对微系统的设计有着重要意义。文献[8]以输送无黏不可压缩流体的固支单层碳纳米管为研究对象,考虑温度场和轴向磁场作用,应用非局部理论分析模型稳定性。文献[12]考虑非局部理论和表面效应,建立了一种新型纳米输流管自由振动解析模型,分析纳米管内外表面层的表面弹性和残余表面张力对自由振动的影响。文献[13]建立了悬臂纳米输流管模型,增加端部的从动力以及切向分布载荷作用,考虑非局部弹性理论,分析输流管临界流速的影响因素。不同于以上分析纳米管等纳米尺寸量级的输流管,本研究对象微管属于微米尺寸量级,主要基于血管以及微型热交换器中输流微管的实际尺寸。

已有输流管道振动文献多以固体力学研究为主,通过假设流体无黏性,并在管道中匀速流动,以简化流体的影响[2-8,12-14]。实际上,若考虑流体黏性,流体在圆管中层流的速度分布是以圆管的轴线为中心线的二次抛物面,这和无黏假设有很大区别。为更加贴合工程实际,有必要在流固耦合振动的研究中考虑实际流体的黏性因素。针对黏弹性流体,文献[15]建立输送黏弹性流体的弯曲纳米管的耦合模型,研究非局部参数、曲率以及流体黏性对模型振动的影响。文献[16]研究在热环境下承受轴向谐波载荷并输送黏性流体的纳米管的动态稳定性,导出了耦合运动方程并分析了各参数的影响。这类文献多基于非局部理论推导运动方程[15-19],其中非局部参数在各种不同模型和工况下往往难以定量给出。本研究将输流微管简化为 Euler 梁模型,基于修正偶应力理论,研究输流微管的振动特性。利用虚功原理导出黏性流体作用下的输流微管系统控制方程。

在求解方法上,以往对输流管道振动问题主要采取有限元法[4-5]、微分求积法[12]等,而微分变换法(differential transformation method, DTM)作为一种半解析方法,具有求解精度和计算效率高的优点[6]。文献[20]采用 DTM 方法对微板振动的控制方程进行求解并验证了结果的准确性。文献[21]考虑梁表面影响,利用 DTM 方法求解了温度场和电磁场作用下的弹性约束压电纳米梁的固有频率,并验证了 DTM 方法相对于其他经典算法具有更快的收敛速度。文献[22]采用 DTM 方法求解流固耦合问题,并将所得结果与有限单元法进行比较,证明了 DTM 方法的计算效率更高。因此,DTM 是一种有效的分析流体输送管道振动的方法。对于流固耦合振动问题,文献多利用 DTM 方法研究不可压缩无旋无黏流体[6,22-23]。

本研究考虑流体的黏弹性,应用 DTM 方法来研究输流微管的振动特性,通过数值求解分析流体黏性、微管材料的内禀特征尺寸参数和预应力对前三阶固有频率的影响。与以往的输流微纳米管的动力学研究相比,有如下创新点:首先,以往文献多采用非局部理论研究微纳米管特别是输流纳米管的动力学特性,本研究利用修正偶应力理论结合微分变换法研究输流微管的振动及其临界流速;其次,考虑实际流体黏性时,流体在微管内状态为层流,通过计算最大层流速度,明确本研究流体速度范围,相比于匀速假设,本研究的动力响应结果更加接近工程实际。此外,考虑到输流管一般会承受轴向力作用,本研究探讨微管轴向预应力对流体临界流速的影响,因为临界流速与输流微管的输送效率密切相关。

1 物理模型

建立如图 1 所示输流微管道坐标系,不可压缩流体速度 v 沿 x 轴正向,梁在两支撑间的长度为 L,宽为 b,厚为 h。微管 x 方向预应力为 σ_0,弹性模量为 E,密度为 ρ_b,流体密度为 ρ_f,微管内径为 R_1,外径为 R_2,流体截面积为 A_1,微管截面积为 A_2。

根据 YANG 等[24]提出的修正偶应力理论,细长微管采用 Euler 梁模型,则微管的应变能变分为

$$\delta U = \int_0^L \left[\begin{array}{l} (EI + Gl^2A_2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \\ \sigma_0 A_2 \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial \delta w}{\partial x} \end{array} \right] \mathrm{d}x \tag{1}$$

其中：l 为材料内禀特性尺寸参数；w 为沿 z 轴的横向位移；$G = E/2(1+\upsilon)$ 为拉梅常数或剪切模量，这里 υ 为泊松比。式(1)考虑了截面内的内力在微段变形上所做的虚功之和。

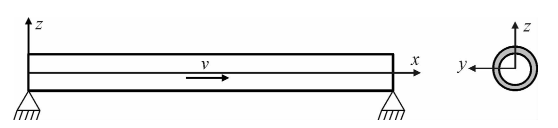


图 1　输流微管道示意图

Fig. 1　Schematic diagram of a fluid-conveying micro-tubule

在定常流动中，流体在微圆管中层流速度方程为[25-26]

$$v = \frac{\Delta p(R_1^2 - r^2)}{4\mu l} \tag{2}$$

其中：R_1 为微圆管半径；r 为径向坐标；μ 为流体动力黏度；Δp 为管道两端受到的流体压力差。

由流体流量 $q = \int_0^{R_1} 2\pi r v \mathrm{d}r$ 以及流体平均速度 $\bar{v} = \dfrac{q}{A_1}$，可以得到微圆管中层流速度分布方程，即

$$v = \frac{2\bar{v}}{R_1^2}(R_1^2 - r^2) \tag{3}$$

流体质点沿 z 轴的横向加速度 $a_\mathrm{f} = \dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}$ 须按照加速度合成定理计算，即

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4}$$

其中式(4)右边分别代表流体沿 z 轴牵连加速度、科氏加速度和向心加速度。

外力做功的变分为

$$\begin{aligned} \delta V &= -\int_0^L\int_{A_2}\left(\rho_\mathrm{b}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \rho_\mathrm{b}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)\mathrm{d}A\mathrm{d}x - \\ &\quad \int_0^L\int_{A_2}\rho_\mathrm{f} a_\mathrm{f}\delta w \mathrm{d}A\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L\int_{A_2}\left(\rho_\mathrm{b}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \rho_\mathrm{b}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)\mathrm{d}A\mathrm{d}x - \\ &\quad \int_0^L\left(\int_0^{R_1}\rho_\mathrm{f}2\pi r\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}v^2\right)\mathrm{d}r\delta w\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5}$$

其中，u 为轴向位移。

上式考虑了外力所做的虚功之和，包括微管沿着轴向和横向的惯性力所做虚功，也包括流体与微管相互作用惯性力、离心力和科氏力的影响。因为本研究考虑不可压缩流体，因此微管两端的压力差不做功。同时，微管受到的预应力远大于黏性力，因此黏性力虚功可以忽略。

将式(1)和式(5)代入虚功原理表达式

$$\delta U = \delta V \tag{6}$$

经分部积分后得到

$$\int_0^L \left[\begin{array}{l} (EI + Gl^2A_2)\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ \left(\rho_\mathrm{f}A_1\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + M\bar{v}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + N\bar{v}^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \\ \rho_\mathrm{b}A_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_\mathrm{b}I\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} - \sigma_0 A_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{array} \right]\delta w \mathrm{d}x +$$

$$(EI + Gl^2A)\left(\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial \delta w}{\partial x} - \\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}\delta w \end{array} \right)\Bigg|_0^L + \rho I\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\Bigg|_0^L +$$

$$\sigma_0 A\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\Bigg|_0^L = 0 \tag{7}$$

其中

$$M = \int_0^{R_1}\rho_\mathrm{f}2\pi r\frac{4}{R_1^2}(R_1^2 - r^2)\mathrm{d}r,$$

$$N = \int_0^{R_1}\rho_\mathrm{f}2\pi r\left(\frac{2}{R_1^2}(R_1^2 - r^2)\right)^2\mathrm{d}r$$

由式(7)可得到控制方程，即

$$\begin{aligned} &(EI + Gl^2A_2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ &\left(\rho_\mathrm{f}A_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + M\bar{v}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + N\bar{v}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \\ &\rho_\mathrm{b}A_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_\mathrm{b}I\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} - \sigma_0 A_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

两端简支边界条件为，即

$$w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=L} = 0 \tag{9}$$

设控制方程式(8)的解为

$$w(x,t) = W(x)\mathrm{e}^{\omega t} \tag{10}$$

其中：$W(x)$ 是模态函数；ω 是固有角频率。将式(10)代入式(8)得到

$$\left(\rho_\mathrm{f}A_1 W + \rho_\mathrm{b}A_2 W - \rho I\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\omega^2 + M\bar{v}\frac{\partial W}{\partial x}\omega +$$

$$(EI + Gl^2A_2)\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (N\bar{v}^2 - \sigma_0 A)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \tag{11}$$

对式(11)进行无量纲化，得

$$\left(\rho_f A_1 L\bar{w} + \rho_b A_2 L\bar{w} - \frac{\rho I}{L}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}\right)\omega^2 + M\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\omega + \frac{(EI + Gl^2 A_2)}{L^3}\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \frac{(N\bar{v}^2 - \sigma_0 A)}{L}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \tag{12}$$

其中 $\bar{w} = \dfrac{W}{L},\ \bar{x} = \dfrac{x}{L}$

2 DTM 应用

DTM 是一种基于泰勒级数展开的用于求解复杂微分方程的变换方法,它使用充分可微的多项式形式作为精确解的近似,使计算的效率大大提高。根据文献[27],微分变换和微分逆变换分别表示为

$$Y[k] = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right)_{x=x_0} \tag{13}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x - x_0)^k Y[k] \tag{14}$$

表 1 列出了在文章分析中常用的 DTM 基本运算[28]。

表 1 DTM 常用基本运算

Tab. 1 Basic mathematics operations of DTM

原函数	转化后的函数
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$w(x) = \lambda y(x)$	$W(k) = \lambda Y(k)$
$w(x) = \dfrac{dy(x)}{dx}$	$W(k) = (k+1)Y(k+1)$
$w(x) = \dfrac{d^n y(x)}{dx^n}$	$W(k) = (k+1)(k+2)\cdots(k+n)Y(k+n)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^{k} Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases}1, k = m\\ 0, k \neq m\end{cases}$

对式(12)微分变换,得

$$W(k+4) = \frac{\left[\begin{array}{l}\left(\rho_f A_1 L W(k) + \rho_b A_2 L W(k) - \dfrac{\rho I}{L}(k+1)(k+2)W(k+2)\right)\omega^2 + \\ M\bar{v}(k+1)W(k+1)\omega + \\ \dfrac{(N\bar{v}^2 - \sigma_0 A)}{L}(k+1)(k+2)W(k+2)\end{array}\right]}{-\dfrac{(EI + Gl^2 A_2)}{L^3}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \tag{15}$$

类似地,边界条件式(9)可转化为

$$W(0) = W(2) = 0 \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} W(k) = 0 \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)W(k) = 0 \tag{18}$$

将式(15)代入式(17)和(18),所得两个方程仅包含 $W(1)$ 和 $W(3)$ 两个未知量,因此可以整理成如下矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W(1) \\ W(3) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{19}$$

其中,y_{ij} 与微管系统参数和固有频率 ω 相关,为使式(19)有非零解,需要

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{20}$$

由式(20)可以解得各阶固有频率,图 2 给出了本研究计算过程的流程图。

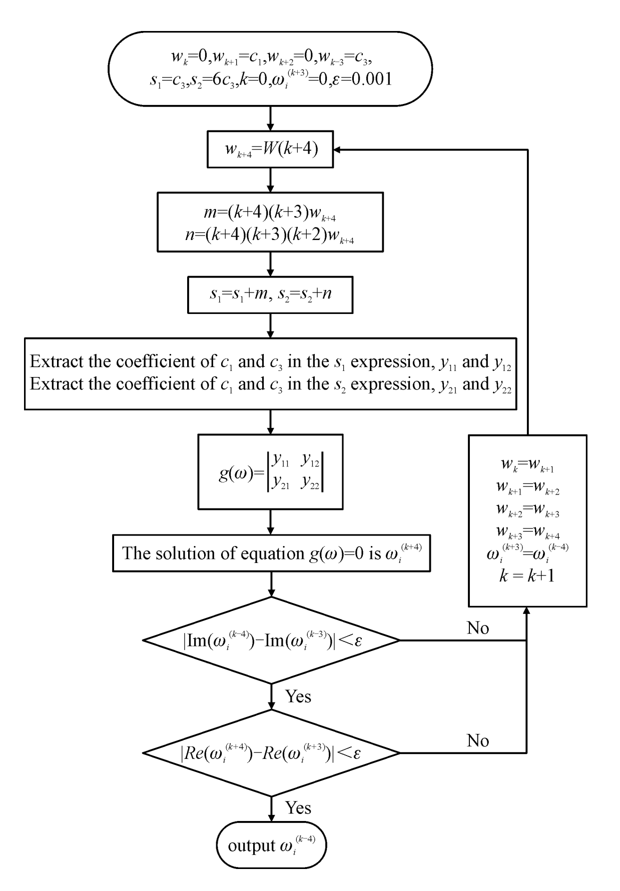


图 2 微分变换法计算流程简图

Fig. 2 Calculation flow chart of differential transformation method

3　数值算例

采用环氧树脂材料，弹性模量 $E = 1.44$ GPa，泊松比 $\upsilon = 0.38$，$l = 17.6$ μm[24]。微管内径 $R_1 = 9.65$ μm，外径 $R_2 = 10$ μm。黏性流体层流只出现在雷诺数较小的情况下，雷诺数计算公式为

$$Re = \frac{2R_1\rho_f\bar{v}}{\mu} \tag{21}$$

对微管 $Re < 2\,320$ 时为层流，由此得到流体在微管中层流的最大平均速度，即

$$\bar{v} < \frac{2\,320\mu}{2R_1\rho_f} \tag{22}$$

设定流体动力黏度 $\mu = 0.1$ Pa·s，则由式(22)计算最大层流平均速度为 15 026 m/s。

表 2 将 DTM 方法所得结果与有限差分法(finite differential method，FDM)所得结果进行了对比，其中 FDM 采用 100 个计算节点，两种方法下结果误差不超过 0.08%。图 3 给出了前三阶固有频率与流体平均速度的关系，并给出了无黏性流体在相同平均流速条件下的固有频率。输流微管的振动表现出流速越大固有频率越小的特性。在微管内流体平均速度相同即流量相同的条件下，流体黏性使得微管前三阶固有频率偏低，且平均速度越大两者之间的偏差越大。

表 2　DTM 与 FDM 结果对比

Tab. 2　Natural frequency of tubules with different methods

速度/(m·s⁻¹)	FDM Mode 1/(10⁶ rad·s⁻¹)	FDM Mode 2/(10⁶ rad·s⁻¹)	FDM Mode 3/(10⁶ rad·s⁻¹)	DTM Mode 1/(10⁶ rad·s⁻¹)	DTM Mode 2/(10⁶ rad·s⁻¹)	DTM Mode 3/(10⁶ rad·s⁻¹)
5	1.051 570	4.178 150	9.346 510	1.051 657	1.051 657	1.051 657
25	0.960 179	4.107 850	9.282 110	0.960 263	0.960 263	0.960 263
50	0.621 682	3.882 680	9.079 260	0.621 772	0.621 772	0.621 772

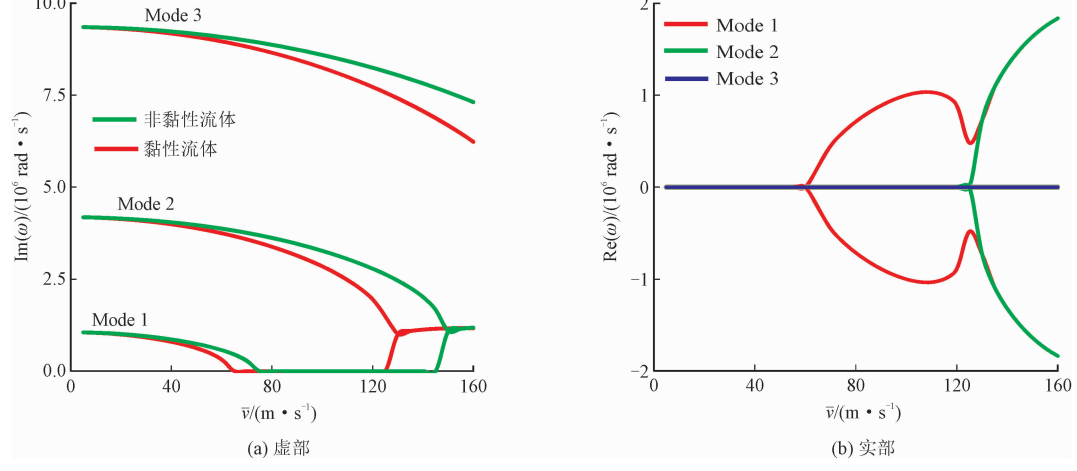


图 3　微管固有频率与流体速度的关系

Fig. 3　Natural frequency of tubules vs. fluid velocity

值得注意的是，流体平均速度为 68 m/s 附近时，第一阶固有频率为零，这一流速称为临界速度。此时输流微管失稳，若继续增大流体速度则流体离心力将对管道结构造成破坏，这一失稳形式通常称为动态失稳，在微管系统设计时需要严格避免；在微管两端固支的条件下，微管系统有类似失稳形式；若微管悬臂支撑，根据现有理论模型可以断定，流速增大则各阶固有频率降低，这一结论与宏观尺度管道相同，详见文献[6]。有意思的是，悬臂微管达到临界速度后，继续增大流速不会造成结构破坏，因此称为静态失稳。限于篇幅，固支和悬臂两种边界条件不再单独给出计算结果。

表 3 给出了内禀特征尺寸对前三阶固有频率的影响，内禀特征尺寸越大则前三阶固有频率越大。表 4 给出了预应力对前三阶固有频率的影响，在预应力增大的过程中，各阶频率均增大，但预应力对各阶频率的影响程度不同，对第一阶频率影响最大，且预应力影响随阶次升高而减小。

表 3 微管内禀特征参数与固有频率的关系

Tab. 3 Natural frequency of micro-tubules vs. the material length scale parameter

l/μm	Mode 1/ (10^6 rad · s^{-1})	Mode 2/ (10^6 rad · s^{-1})	Mode 3/ (10^6 rad · s^{-1})
10	0.369 886	2.775 460	6.551 480
14	0.601 744	3.386 610	7.862 510
17.6	0.797 430	3.991 850	9.176 930
25	1.185 800	5.321 230	12.094 900

表 4 预应力与固有频率的关系

Tab. 4 Natural frequency of tubules vs. prestress

σ/MPa	Mode 1/ (10^6 rad · s^{-1})	Mode 2/ (10^6 rad · s^{-1})	Mode 3/ (10^6 rad · s^{-1})
−10	0.659 247	3.886 950	9.075 130
0	0.785 852	3.982 430	9.167 730
10	0.895 067	4.075 670	9.259 390
增长率	26.35%	4.63%	1.99%

为得到临界流速,可略去式(15)与频率相关的量,得到

$$W(k+4)=\frac{(N\bar{v}_C^2-\sigma_0 A)W(k+2)}{-\dfrac{(EI+\mu l^2 A_2)}{L^2}(k+3)(k+4)} \tag{23}$$

其中 $\bar{v}_C$ 代表临界流速。式(23)结合边界条件式(17)和(18)可以解得各阶临界流速。

表 5 给出了前三阶临界流速与预应力的关系,可见预应力增大使得各阶临界流速都增大,预应力对第一阶固有频率影响最大,预应力的影响随阶次升高而减小。

表 5 预应力与临界流速的关系

Tab. 5 Critical speed versus prestress

σ/MPa	v_{C1}/(m · s^{-1})	v_{C2}/(m · s^{-1})	v_{C3}/(m · s^{-1})
−10	57.06	122.87	186.60
0	62.84	125.66	188.45
10	68.12	128.38	190.28
增长率	16.24%	4.29%	1.93%

4 结 论

本研究基于修正偶应力理论和 Euler 梁模型,结合虚功原理推导了输流微管的控制方程。考虑流体黏性,给出了流体在圆形微管中的速度分布方程。因为黏性的存在要求有压力差才能流动,由此造成速度分布不均匀。在平均速度相同的条件下,利用 DTM 作为求解工具,探讨了速度不均亦即流体黏性对微管的横向振动的影响,并将数值结果与有限差分法求解结果进行了对比。讨论了材料内禀特征尺寸和预应力对系统振动的影响。求解了前三阶临界流速,分析了预应力对临界流速的影响。研究表明黏性的存在使得前三阶固有频率趋于降低,流体平均速度越高黏性影响越大。材料内禀特征尺寸越大,即偶应力效应越强则前三阶固有频率越大。随着预应力增大,各阶固有频率和各阶临界流速均增大,阶次越高则预应力的影响越小。

参考文献:

[1] 方孟孟,郭长青. 悬臂输流管道在基础激励与脉动内流联合作用下的参激振动[J]. 应用力学学报,2020,37(2):647-654.
FANG Mengmeng,GUO Changqing. Parametric vibration of cantilevered pipes under combined action of foundation excitation and pulsating internal flow[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020,37(2):647-654(in Chinese).

[2] 赵凤群,王忠民,冯振宇. 三参量固体模型黏弹性输流管道的动力特性分析[J]. 固体力学学报,2002,23(4):483-489.
ZHAO Fengqun,WANG Zhongmin,FENG Zhenyu. Analysis of the dynamic behaviors of viscoelastic pipe conveying fluid with three-parameter solid model[J]. Acta mechanica solida Sinica,2002,23(4):483-489(in Chinese).

[3] ZHOU K,NI Q,CHEN W,et al. Static equilibrium configuration and nonlinear dynamics of slightly curved cantilevered pipe conveying fluid[J]. Journal of sound and vibration,2021,490:115711.

[4] HESHMATI M. Influence of an eccentricity imperfection on the stability and vibration behavior of fluid-conveying functionally graded pipes[J]. Ocean engineering,2020,203:107192.

[5] TAN X,DING H,SUN J Q,et al. Primary and super-harmonic resonances of Timoshenko pipes conveying high-speed fluid[J]. Ocean engineering,2020,203:107258.

[6] NI Q,ZHANG Z L,WANG L. Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid[J]. Applied mathematics and computation, 2011, 217 (16): 7028-7038.

[7] 赵千里,孙志礼,柴小冬,等. 具有弹性支承输流管路的强迫振动分析[J]. 机械工程学报,2017,53(12):186-191.
ZHAO Qianli,SUN Zhili,CHAI Xiaodong,et al. Forced vibration a-

nalysis of fluid-conveying pipe with elastic supports[J]. Journal of mechanical engineering,2017,53(12):186-191(in Chinese).

[8] 李明,周攀峰,郑慧明. 多场作用下输流单层碳纳米管的动力学特性[J]. 固体力学学报,2017,38(5):426-432.
LI Ming, ZHOU Panfeng, ZHENG Huiming. Dynamic characteristics of carbon nanotubes conveying fiuid in multi-physics fields [J]. Chinese journal of solid mechanics,2017,38(5):426-432(in Chinese).

[9] FARAJPOUR A,GHAYESH M H,FAROKHI H. Local dynamic analysis of imperfect fluid-conveying nanotubes with large deformations incorporating nonlinear damping[J]. Journal of vibration and control,2020,26(7/8):413-429.

[10] GHANE M,SAIDI A R,BAHAADINI R. Vibration of fluid-conveying nanotubes subjected to magnetic field based on the thin-walled Timoshenko beam theory [J]. Applied mathematical modelling, 2020,80:65-83.

[11] SAFFARI P R,FAKHRAIE M,ROUDBARI M A. Nonlinear vibration of fluid conveying cantilever nanotube resting on visco-pasternak foundation using non-local strain gradient theory[J]. Micro & nano letters,2020,15(3):181-186.

[12] WANG L. Vibration analysis of fluid-conveying nanotubes with consideration of surface effects[J]. Physica E:low-dimensional systems and nanostructures,2010,43(1):437-439.

[13] BAHAADINI R,HOSSEINI M,JAMALPOOR A. Nonlocal and surface effects on the flutter instability of cantilevered nanotubes conveying fluid subjected to follower forces[J]. Physica B:condensed matter,2017,509:55-61.

[14] TANG Y,YANG T Z. Bi-directional functionally graded nanotubes: fluid conveying dynamics[J]. International journal of applied mechanics,2018,10(4):1850041.

[15] KARAMI H,FARID M. A new formulation to study in-plane vibration of curved carbon nanotubes conveying viscous fluid[J]. Journal of vibration and control,2015,21(12):2360-2371.

[16] HASHEMIAN M,VAEZ A H,TOGHRAIE D. Investigation of viscous fluid flow and dynamic stability of CNTs subjected to axial harmonic load coupled using Bolotin's method [J]. International journal of numerical methods for heat & fluid flow,2020,30(6): 3435-3462.

[17] FARAJPOUR A,FAROKHI H,GHAYESH M H. A nonlinear viscoelastic model for NSGT nanotubes conveying fluid incorporating slip boundary conditions [J]. Journal of vibration and control, 2019,25(12):1883-1894.

[18] ADALI S. Variational principles for vibrating carbon nanotubes conveying fluid,based on the nonlocal beam model[J]. East asian journal on applied mathematics,2015,5(3):209-221.

[19] AZRAR A,AZRAR L,ALJINAIDI A A. Numerical modeling of dynamic and parametric instabilities of single-walled carbon nanotubes conveying pulsating and viscous fluid[J]. Composite structures,2015,125:127-143.

[20] KARIMIPOUR I,TADI BENI Y,ZEIGHAMPOUR H. Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates [J]. Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering,2020,42(8):407.

[21] EBRAHIMI F,KOKABA M,SHAGHAGHI G,et al. Dynamic characteristics of hygro-magneto-thermo-electrical nanobeam with non-ideal boundary conditions[J]. Advances in nano research,2020,8 (2):169-182.

[22] REZAIEE-PAJAND M,KAZEMIYAN M S,AFTABI S A. Solving coupled beam-fluid interaction by DTM [J]. Ocean engineering, 2018,167:380-396.

[23] HOSSEINI M,SADEGHI-GOUGHARI M. Vibration and instability analysis of nanotubes conveying fluid subjected to a longitudinal magnetic field[J]. Applied mathematical modelling,2016,40(4): 2560-2576.

[24] YANG F,CHONG A C M,LAM D C C,et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. International journal of solids and structures,2002,39(10):2731-2743.

[25] 章梓雄,董曾南. 黏性流体力学[M]. 北京:清华大学出版社,1998.

[26] MUNSON B R. Fundamentals of fluid mechanics[M]. 6th ed. Hoboken,NJ:Wiley,2009.

[27] 赵家奎. 微分变换及其在电路中的应用[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1988.

[28] CHEN C K,HO S H. Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko beams under axial loading using differential transform [J]. International journal of mechanical sciences,1999,41(11): 1339-1356.

（编辑　张璐）